Solusi Kuis I MA1101 Matematika IA (Kelas 01)

Kevin Mandira Limanta

1. Selesaikan persamaan $|3-2x| \geq |x|$.

   Cara 1: Gunakan sifat $|x| \geq |y| \Rightarrow x^2 \geq y^2$.

   Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&|3-2x| \geq |x| \\
\Leftrightarrow\ &(3-2x)^2 \geq x^2 \\
\Leftrightarrow\ &9-12x+4x^2 \geq x^2 \\
\Leftrightarrow\ &3x^2-12x+9 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ &x^2-4x+3 \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ &(x-1)(x-3) \geq 0
\end{aligned}$$

   Sekarang, pembuat nol dari ekspresi di atas adalah $x = 1$ **atau** $x = 3$. Dengan melakukan uji tanda (coba untuk $x = 0$, $x = 2$, dan $x = 4$) didapatkan daerah solusinya adalah $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$.

   Cara 2: Karena

$$|3-2x| = \begin{cases} 3-2x, \text{ jika } 3-2x \geq 0 \text{ (dengan kata lain, } x \leq \frac{3}{2}) \\ 2x-3, \text{ jika } 3-2x < 0 \text{ (dengan kata lain, } x > \frac{3}{2}) \end{cases}$$

   dan

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ jika } x \geq 0 \\ -x, \text{ jika } x < 0 \end{cases},$$

   maka kita bagi domain pembicaraan kita menjadi tiga, yaitu $(-\infty, 0)$, $\left[0, \dfrac{3}{2}\right]$, dan $\left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$.

   a. Jika $x \in (-\infty, 0)$, maka $|3-2x| = 3-2x$ dan $|x| = -x$. Karenanya, pertidaksamaan pada soal menjadi $3-2x \geq -x$ yang memberikan $x \leq 3$. Jadi, himpunan penyelesaian untuk kasus ini adalah $\text{HP}_1 = (-\infty, 0) \cap (-\infty, 3] = (-\infty, 0)$.

   b. Jika $x \in \left[0, \dfrac{3}{2}\right]$, maka $|3-2x| = 3-2x$ dan $|x| = x$. Karenanya, pertidaksamaan pada soal menjadi $3-2x \geq x$ yang memberikan $x \leq 1$. Jadi, himpunan penyelesaian untuk kasus ini adalah $\text{HP}_2 = \left[0, \dfrac{3}{2}\right] \cap (-\infty, 1] = [0, 1]$.

   c. Jika $x \in \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right)$, maka $|3-2x| = 2x-3$ dan $|x| = x$. Karenanya, pertidaksamaan pada soal menjadi $2x-3 \geq x$ yang memberikan $x \geq 3$. Jadi, himpunan penyelesaian untuk kasus ini adalah $\text{HP}_3 = \left(\dfrac{3}{2}, \infty\right) \cap [3, \infty) = [3, \infty)$.

Dari ketiga kasus, didapatlah himpunan penyelesaian totalnya adalah

$$\begin{aligned}\mathrm{HP} &= \mathrm{HP}_1 \cup \mathrm{HP}_2 \cup \mathrm{HP}_3 \\ &= (-\infty, 0) \cup [0, 1] \cup [3, \infty) \\ &= (-\infty, 1] \cup [3, \infty).\end{aligned}$$

Catatan: Cara kedua jauh lebih panjang daripada cara pertama, namun ini cara yang secara umum lebih baik. Bayangkan jika soalnya diubah menjadi cari solusi dari $|x^2-4x+3| \geq |x-4|$. Mengkuadratkan kedua ruas akan membuat Anda bertemu dengan polinom berderajat 4!

2. Diketahui $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$.

   a. Buktikan bahwa f kontinu di $x = 0$.

   Perhatikan bahwa domain dari f adalah $[0, \infty)$. Karena $x = 0$ adalah ujung selang, maka untuk membuktikan kekontinuan di $x = 0$ cukup dengan melihat apakah $f(x)$ kontinu kanan di $x = 0$, yaitu apakah

   $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

   Sekarang, untuk $x \neq 0$, berlaku $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. Dengan mengalikan semua ruas dengan $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$ untuk $x > 0$, kita dapatkan

   $$-x^{\frac{3}{2}} \leq x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^{\frac{3}{2}}.$$

   Dengan mengambil limit dari semua ruas untuk $x \to 0^+$, didapat

   $$\lim_{x\to 0^+} -x^{\frac{3}{2}} \leq \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{2}}$$

   yang memberikan $0 \leq \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$. Berdasarkan Teorema Apit, maka haruslah $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

   Karena $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$, maka f kontinu (kanan) di $x = 0$.

   b. Selidiki apakah f memiliki turunan di $x = 0$.

   Kembali, karena $x = 0$ ujung selang, maka untuk membuktikan keterdiferensialan f di $x = 0$, cukup dengan melihat apakah $f(x)$ memiliki turunan kanan di $x = 0$, yaitu apakah

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

   ada atau tidak.

   Karena $f(0) = 0$, ekspresi di atas dapat ditulis menjadi $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Dengan argumentasi yang sama seperti di atas (menggunakan Teorema Apit), dapat dilihat bahwa limitnya ada dan nilainya 0. Jadi f terdiferensialkan di $x = 0$.

Catatan: Hati-hati dalam mengerjakan soal semacam ini. Akan sangat bermanfaat untuk mengecek dulu domain fungsi yang Anda kerjakan. Banyak mahasiswa yang tidak sadar bahwa $f(x)$ tidak terdefinisi jika $x < 0$. Membuktikan kekontinuan atau keterdiferensialan di ujung selang hanya membutuhkan kekontinuan atau keterdiferensialan dari satu sisi saja.

3. Tentukan turunan dari $g(x) = \dfrac{\sin(x) + \cos(x)}{x}$.

   Misalkan $u(x) = \sin(x) + \cos(x)$ dan $v(x) = x$, maka $u'(x) = \cos(x) - \sin(x)$ dan $v'(x) = 1$. Dengan menggunakan sifat turunan hasil bagi, didapat turunan dari $g(x)$ adalah

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{x(\cos(x) - \sin(x)) - (\sin(x) + \cos(x))}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)\cos(x) - (x+1)\sin(x)}{x^2} \end{aligned}$$

   Catatan: Anda tidak diharapkan untuk menggunakan definisi turunan di soal semacam ini. Kecuali memang diperintahkan menggunakan definisi, langsung saja gunakan teorema atau sifat yang sudah Anda pelajari (dan akan jauh lebih baik jika Anda sebutkan teorema atau sifat apa yang Anda gunakan). Beberapa mahasiswa juga banyak yang menganggap bahwa $\cos(x) \cdot x = \cos(x^2)$. Ini jelas tidak benar (kecuali jika $x = 1$ atau x lainnya yang merupakan solusi :D)